Projektif Geometri Arasınavı(07.04.2019)

Adı Soyadı:

Numarası:

1	2	3	4	5	Toplam

1.) Bir $\mathbb{A}$ Afin düzleminde herhangi üçü doğrudaş olmayan dört noktanın daima var olduğunu ispatlayınız.

2.) Verilen her $\mathcal{F}$ cismi için nokta ve doğruları bu cismin elemanlarıyla cebirsel olarak belirtilebilen bir afin düzlem vardır. İspatlayınız.

3.) Bir Afin düzleminde birbirine paralel doğrulardan oluşan herhangi iki kümenin aynı sayıda elemanı olduğunu ve bu sayının düzlemin mertebesine eşit olduğunu gösteriniz. Böyle $n+1$ tane kümenin (paralel doğru demetinin) var olduğunu gösteriniz.

4.) Herhangi bir cisim kullanmaksızın, 16 noktalı bir afin düzlem kurunuz

5.) Bir $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzleminde herhangi farklı iki doğrunun dışında bir noktanın daima var olduğunu gösteriniz.

<u>NOT:</u> Süre 90 dakikadır. BAŞARILAR. *Prof. Dr. Ayhan TUTAR*

CEVAPLAR

CEVAP ANAHTARI

Mat 424 Projektif Geometri Ara Sınavı

C-1) (A3) aksiyomu gereğince $\mathcal{A}$ da doğrudaş olmayan üç nokta vardır, bunlar $K, L, M \in \mathcal{N}$ olsun.

(A1) aksiyomu gereğince M ve L yi birleştiren ML doğrusu vardır ve K noktası ML üzerinde değildir. Yani, $K \not\circ ML$. Çünkü; K, L, M yi doğrudaş olmayan üç nokta olarak seçtik.

$K \not\circ ML \xRightarrow{\text{A2 den}} \exists\, k \in \mathcal{D} \ni K \circ k,\ k // ML$ dir.

$M \not\circ KL \xRightarrow{\text{A2 den}} \exists\, m \in \mathcal{D} \ni M \circ m$ ve $m // KL$ dir. Ayrıca

(A1) den $\exists\, KL \in \mathcal{D} \ni M \not\circ KL$ dir.

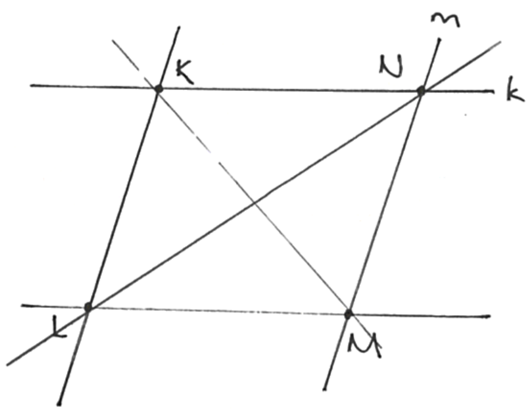
<u>İddia 1:</u> $k \neq m$ dir. Çünkü $k = m$ olsa idi $k = ML$ doğrusu ML ye paralel olamaz (çünkü M ortak). Halbuki $k // ML$ almıştık. $k \not\parallel m$ olur. Çünkü $k // m$ olursa $KL // m // k // ML$ olurdu ki bu da Teorem 2.2.4 ($\mathcal{A}$ afin düzleminde $b, c, d \in \mathcal{D}$ için $b // c$ ve $c // d$ ise $b = d$ ya da $b // d$ dir) gereğince $KL = ML$ veya $KL // ML$ dir.

$KL = ML \Rightarrow$ K, L, M nin doğrudaş olması demektir. Bu ise hipoteze aykırıdır.

$KL // ML \Rightarrow L \circ KL$ ve $L \circ ML$ olduğundan bu da mümkün değildir.

<u>İddia 2:</u> $k \neq m$ ve $k \not\parallel m$ ise k ve m bir noktada kesişir. Yani, $\exists\, N \in \mathcal{N} \ni N = k \wedge m$ olacak şekilde 4. cü bir $N \in \mathcal{N}$ noktası vardır.

Sonuç: N noktası KL ye paralel olan m doğrusu üzerinde bulunduğundan $N \neq K$ ve $N \neq L$ dir. Benzer olarak N noktası k üzerinde bulunduğundan $N \neq M$ dir. Dolayısıyla N, istenen özellikte 4. noktadır.



Mat 424 Projektif Geometri Ara Sınavı

C-2) $(F, +, \cdot)$ cismi verilsin. Bu F cismi yardımıyla analitik olarak tanımlanan $\mathcal{N} = F \times F = \{(x,y) \mid x, y \in F\}$, $\mathcal{D} = \{[m,b] \mid m, b \in F\} \cup \{[a] \mid a \in F\}$ ve

o: üzerinde bulunma bağıntısı

$(x,y) \circ [m,b] \Leftrightarrow y = mx + b$

$(x,y) \circ [a] \Leftrightarrow x = a$

ile tanımlansın. $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sisteminin bir afin düzlem olduğunu görelim.

A1) $x_i, y_i \in F$, $i = 1,2$, o.ü. verilen (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktalarını birleştiren doğru

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x_1, y_1) \circ [m,b] \Rightarrow y_1 = mx_1 + b \\ (x_2, y_2) \circ [m,b] \Rightarrow y_2 = mx_2 + b \end{array} \right\}$$ m ve b yi çözeceğiz.

$y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2)$ dir. $x_1 \neq x_2$ old. dan $x_1 - x_2 \neq 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)^{-1}$ vardır.

O halde m'yi çözebiliriz. $m = (y_1 - y_2)(x_1 - x_2)^{-1}$. $y_1 = mx_1 + b$ de m nin değerini yerine yazarsak $b = y_1 - mx_1 = y_1 - (y_1 - y_2)(x_1 - x_2)^{-1} x_1 = (x_1 y_2 - y_1 x_2)(x_1 - x_2)^{-1}$

$\Rightarrow [m,b] = [(y_1 - y_2)(x_1 - x_2)^{-1};\ (x_1 y_2 - y_1 x_2)(x_1 - x_2)^{-1}]$;

$x_1 = x_2$ ise $x_1 - x_2 = 0$ old. dan $(x_1 - x_2)^{-1}$ mevcut değildir. Dolayısıyla m çözülemez. Bu durumda (x_1, y_1), (x_2, y_2) noktalarının ikisi de $[x_1] \in \mathcal{D}$ doğrusu üzerindedir. Dolayısıyla (A1) aksiyomu sağlanır.

(A2): $N = (u, v)$ noktası ve $d = [m,b]$ doğrusu verilmiş olsun.

$N \not\circ d \Rightarrow (u,v) \not\circ [m,b] \Rightarrow v \neq mu + b$.

N den geçen d' doğrusunu $[m', b']$ ile gösterirsek $v = m'u + b' \Rightarrow b' = v - m'u$ olur.

Bu durumda; $[m', b'] = [m', v - m'u]$ olur.

Eğer $m \neq m'$ ise $[m,b]$ ve $[m', v - m'u]$ doğrusunun bir ortak noktası olduğu hesaplamalarla görülür. Fakat $m = m'$ ise bu doğruların ortak noktası yoktur.

(u,v) den geçen ve $[m,b]$ ya da $[a]$ ya paralel olan doğru, sırasıyla, $[m, v - mu]$ ya da $[u]$ dur.

Açıklama: $[m,b]$ ve $[m,b']$ paraleldir.

$[m,b]$ ve $[a]$ tipindeki doğrular paralel olamazlar.

Mat 424 Projektif Geometri Arasınavı

(A3) : $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ noktalarını alalım. Bu üç nokta her cisim için vardır.

Bu üç noktanın doğrudaş olmadığını araştıralım:

$y = mx+n$ ($N=(x,y) \in \mathcal{N}$ ve $d=[m,b] \in \mathcal{D}$ için $N \circ d \Rightarrow y = mx+b$ dir).

$$\left.\begin{array}{l} (0,0) \circ [m,b] \Rightarrow b=0 \\ (1,0) \circ [m,b] \Rightarrow m=-b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0) \text{ ve } (1,0) \text{ noktalarından geçen doğru}$$

$[0,0]$ dır. $(0,1)$ noktasının bu doğru üzerinde olup olmadığını araştıralım:

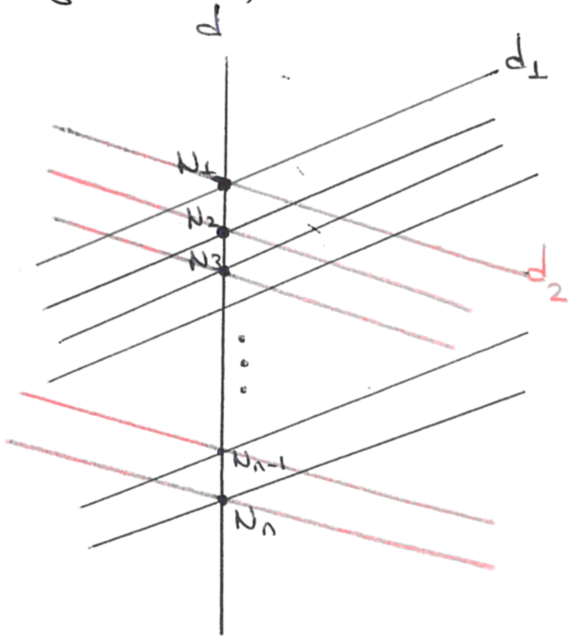
$(0,1) \circ [0,0] \Rightarrow 1 = 0.0+0$ olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $(0,1) \not\circ [0,0]$ dır. Dolayısıyla (A3) aksiyomu sağlanmış. olur.

Mat 424 Projektif Geometri Arasınavı

C-3) d_1 ve d_2; farklı iki paralel demetine ait doğrular olsunlar. Bu durumda $d_1 \nparallel d_2$ olup $d_1 d_2 = N_1$ olacak şekilde $N_1 \in \mathcal{N}$ noktası vardır.

En küçük afin düzlemde bir noktadan 3 doğru geçtiğinden d_1 ve d_2 den farklı olarak N den geçen bir başka d doğrusu vardır.

Bir doğru üzerinde (afin düzlemde bir doğru üzerinde) n- tane nokta bulunduğundan dolayı d doğrusu üzerinde n nokta vardır. Bu noktalar $N_1, N_2, \ldots, N_n$ olsun. (A2) aksiyomu gereğince $\forall N_i$ den geçen ve d_1'e paralel olan doğrular ile $\forall N_i$ den geçen ve d_2 ye paralel olan olan doğrular vardır. Böylece $\forall N_i$ sayesinde d_1 ve d_2'yi kapsayan paralel doğru demetleri arasında 1-1 ve örten bir fonksiyon kurulmuş olur.



Açıkça paralel doğru demetleri ayrıktır. Bir afin düzleminde toplam n^2+n tane doğrunun var olduğunu biliyoruz. Her bir paralel doğru demetinde n tane doğru olduğundan

$$\frac{n^2+n}{n} = \frac{n(n+1)}{n} = n+1$$ tane paralel doğru demeti vardır.

Mat 424 Projektif Geometi Arasınavı

C-4) $\mathcal{A}$ afin düzleminde 16 nokta olması istendiğine göre $n^2=16 \Rightarrow n=4$ düzlemin mertebesidir.

Toplam doğru sayısı $= n^2+n$ den $4^2+4=20$ dir.

Bir afin düzlemde $(n+1)$-tane paralel doğru demeti vardır ve her demet afin düzlemin mertebesi kadar doğru içerir. Buna göre 16 noktalı afin düzlemde 5 tane paralel doğru demeti ve her demet dört (4) doğru içerir. Ayrıca her doğru 4 nokta kapsar.

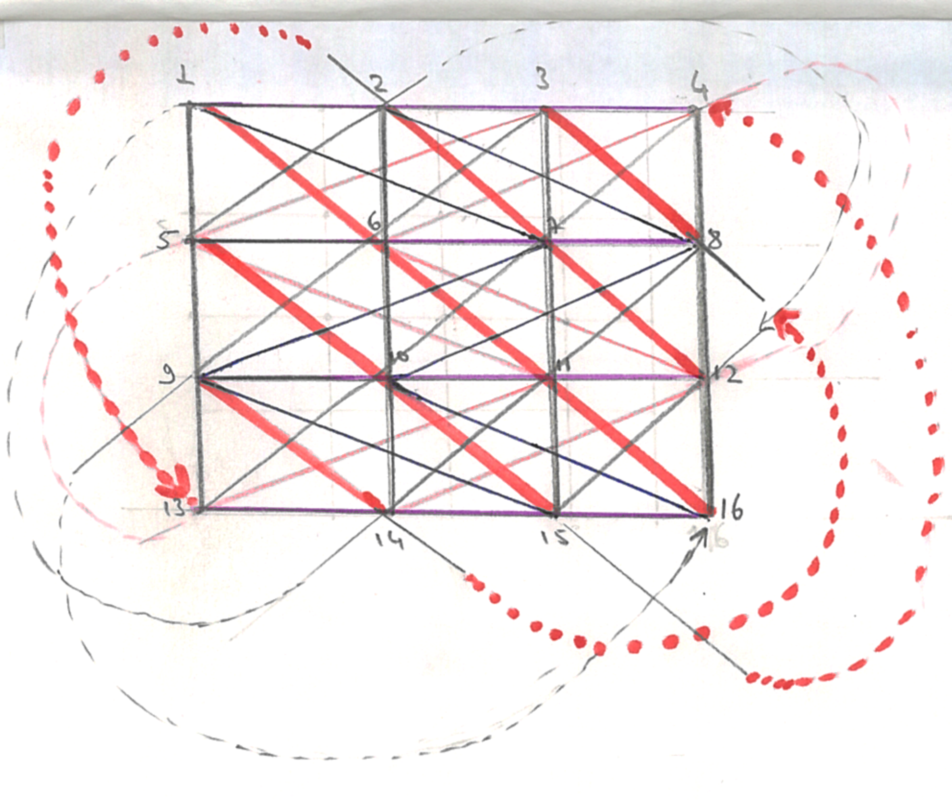
$$\mathcal{N} = \{N_1, N_2, \dots, N_{16}\},$$
$$\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \dots, d_{20}\}.$$

Buna göre $d_1 // d_2 // d_3 // d_4$ o.şekilde 1. grup paralel doğru demetini belirleyelim:

I. grup
$$\begin{cases} d_1 = \{N_1, N_2, N_3, N_4\} \\ d_2 = \{N_5, N_6, N_7, N_8\} \\ d_3 = \{N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}\} \\ d_4 = \{N_{13}, N_{14}, N_{15}, N_{16}\} \end{cases}$$

II. grup
$$\begin{cases} d_5 = \{N_1, N_5, N_9, N_{13}\} \\ d_6 = \{N_2, N_6, N_{10}, N_{14}\} \\ d_7 = \{N_3, N_7, N_{11}, N_{15}\} \\ d_8 = \{N_4, N_8, N_{12}, N_{16}\} \end{cases}$$

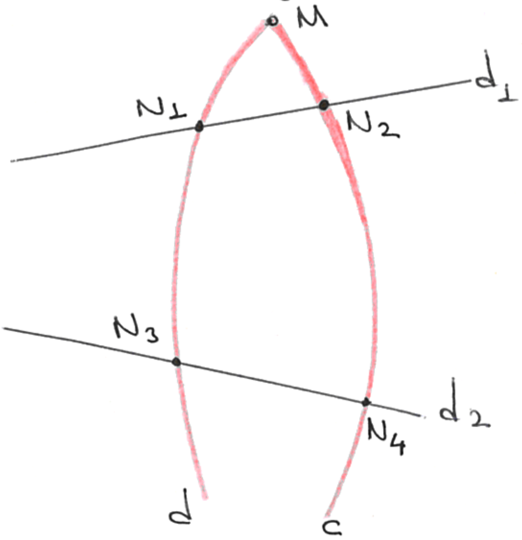
$$\begin{cases} d_9 = \{N_1, N_6, N_{11}, N_{16}\} \\ d_{10} = \{N_2, N_7, N_{12}, N_{16}\} \\ d_{11} = \{N_5, N_{10}, N_{15}, N_4\} \\ d_{12} = \{N_3, N_8, N_9, N_{14}\} \end{cases}
\quad
\begin{cases} d_{13} = \{N_4, N_7, N_{10}, N_{13}\} \\ d_{14} = \{N_3, N_6, N_9, N_{16}\} \\ d_{15} = \{N_8, N_{11}, N_{14}, N_1\} \\ d_{16} = \{N_2, N_5, N_{12}, N_{15}\} \end{cases}
\quad
\begin{cases} d_{17} = \{N_1, N_7, N_9, N_{15}\} \\ d_{18} = \{N_2, N_8, N_{10}, N_{16}\} \\ d_{19} = \{N_3, N_5, N_{11}, N_{13}\} \\ d_{20} = \{N_4, N_6, N_{12}, N_{14}\} \end{cases}$$



I. grup: x-eksenine paralel doğru demeti,
II. grup: y-eksenine paralel doğru demeti (d_5, d_6, d_7, d_8)

Mat 424 Projektif Geometri Arasınavı

C-5) $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$, $d_1 \neq d_2$ için $M \notin d_1$ ve $M \notin d_2$ olacak şekilde bir $M \in \mathcal{N}$ noktasının bulunduğunu gösterelim. Böyle bir M noktasının bulunmadığını varsayalım. (P3) aksiyomu gereğince herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır. Bu noktalar N_1, N_2, N_3, N_4 olsun. Varsayımımız altında bu noktalardan ikisi, örneğin N_1 ve N_2 d_1 üzerinde; diğer ikisi yani N_3 ve N_4 noktaları d_2 üzerinde bulunur. Aksi durumda, N_i lerden en az birisi d_1 ve d_2 üzerinde değilse ispat açıktır. Ayrıca bu dört noktadan herbiri $d_1 d_2$ noktasından farklıdır. Yani; $N_1, N_2, N_3, N_4 \neq d_1 \wedge d_2$ dir. Aksi halde N_i lerden üçü doğrudaş olurdu.



(P1) aksiyomu gereğince (farklı iki noktadan bir tek doğru geçeceğinden) $N_1 N_3$, $N_2 N_4$ doğruları vardır. Ayrıca Teorem 2.3.1 gereğince (farklı iki doğru bir tek noktada kesişir) $N_1 N_3 \wedge N_2 N_4 = M$ arakesit noktası vardır. İddia ediyoruz ki bu M noktası d_1 ve d_2 nin dışındadır. Eğer M, d_1 in üzerinde olsaydı (yani $M o d_1$ olsaydı), $N_1 N_3 = N_1 M = N_1 N_2$ olurdu ki bu da N_1, N_2, N_3, M noktalarının doğrudaş olması demektir. Halbuki N_1, N_2, N_3 noktaları doğrudaş olmadığından mümkün değildir. Dolayısıyla $M \notin d_1$ dir.

Benzer şekilde eğer $M o d_2$ olsaydı $N_2 N_4 = N_2 M = N_3 N_4$ olurdu ki N_2, N_3, N_4, M noktalarının doğrudaş olması demektir. Halbuki N_2, N_3, N_4 noktaları doğrudaş olmadığından bu mümkün değildir.
O halde $M o d_1$ ve $M o d_2$ olacak şekilde bir $M \in \mathcal{N}$ noktası mevcut değildir.